Problem Set 1.1

1 (a) line; (b) plane; (c) all of R3

3. v = (3,3), w = (2,-2)

4. 3*v* + *w* = (7,5); c*v*+d*w* = (2c+d,c+2d)

5. u + v + w = (0,0,0)

u,v,w线性依赖，比如，-u = w+v，并且w,v不共线，所以w,v可以span一个面，并且u在该面上，所以三个向量在一个平面。

6. (c, -2c+d, c-d), c = 3, d = 9

8. 另一个对角线是v-w,对角线之和是2v

9. (4,4),(4,0),(-2,2)

10. i+j 是ij平面中的顶点，i+j+k,是远点的对角点。

11. (1,0,1), (0,1,1), (1,1,0),(1,1,1),中心点(0.5,0.5,0.5)

12. 顶点：24=16；边：16\*4/2 = 32；

3D面：8，4个3维度线性独立，加上一个多余维度的平移，如下

Face 1: 平移

Face 2: 平移

Face 3: 平移

Face 4: 平移

思考4维度空间是无法解决这个问题，因为人脑无法理解4维空间。所以，只能从向量的角度思考，观察3D cube，总结规律。

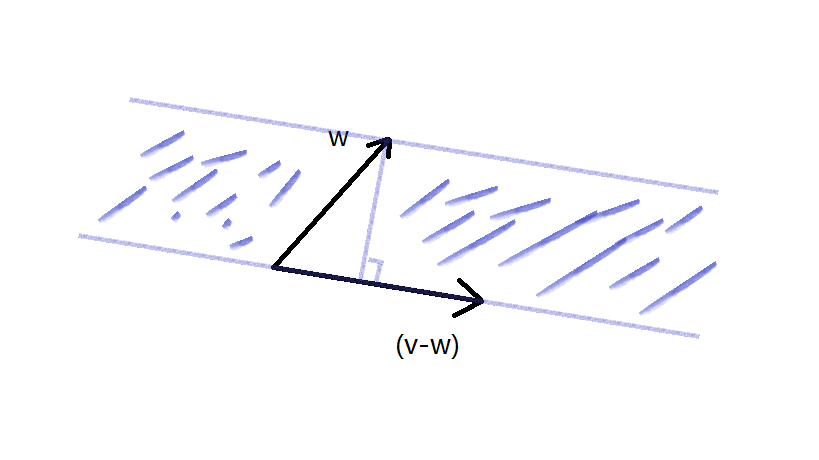
13. (a) 0

(b) 8点与2点对称

(c) v\_2 = (cos30,sin30)

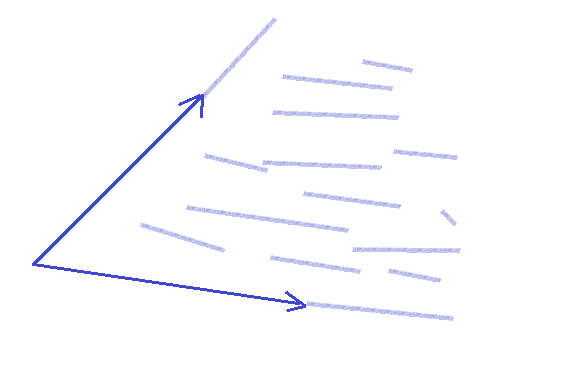
14. (0,1)

16. 带状结构，

c+d=1,目标可写成w+c(v-w)，仍然是两个向量的线性组合，但是有个向量长度固定

17.共线

18.w,v构成的平行四边形

19 如图

28. v=(3,5,7), w = (1,0,-1)

29. (a,b,c) = (1,-1,1) 或 (a,b,c) = (-2,1,0) 高斯消元

如果任意三个向量，不一定可以得到两个解，使得共线。在有共线的情况下，有可能只有一个解，也有可能无解。

30. u，w不共线，且都不为0。

31. c=0.75,d=0.5,e=0.25

Problem Set 1.2

1. u\*v = 1.4, v\*w = 48,u\*(v+w) = 1.4;u\*w=0

左边有个cosθ

1. unit\_v = (3/5,4/5); unit\_w = (4/5,3/5);cosθ=24/25

a = (4,3);b=(3,-4);c=(-4,-3)

1. (a)v\*-v = -1;(b)0;(c)-3
2. Uint\_v=(),U1=()

Unit\_w=(2/3,1/3,2/3), U2=()

1. 全部都是直线
2. (a)0.5;(b)0;(c)0.5;(d)
3. (a)错，任意平面上两向量;(b)对;(c)对
4. 坡度就是tagθ
5. 垂直
6. v,w夹角大于90度，。所有的w构成下半空间，该空间边界用垂直于v的平面构成
7. c=6,通用c如下

13.(-1,0,1);(0,1,0)

14.u=(-1,-1,1,1),v=(1,-1,1,-1);w=(1,-1,-1,1)

16. unit\_v = (1/3,…,1/3), w = (1/2,1/2,-1/2,-1/2,0,…)

17. cosα=v1/;cosβ= v2/;cosθ= v3/

v21+ v22+ v23=

19.

21.

所以

26. 垂直向量最短，直线方向（2，-1），那么有2x-y=0，且x+2y=5,得到x=1,y=-2的向量最短

27.

V\*w = =15

28. 120度，3D 4个

29. 按到定义将x+y+z=0代入，可以得到结果

31.(0.5,0.5,0.5,0.5),( 0.5,-0.5,0.5,-0.5),( 0.5,0.5,-0.5,-0.5),( -0.5,-0.5,0.5,0.5)

Problem Set 1.3

1. b = (2,5,9)

3.

4. 三个向量在一个平面，线性依赖。

如果W可逆，那么x=0，但是显然x可以不为0.这个列子揭示了可逆和线性独立的关系。

5. R矩阵与上面的W矩阵是转置的关系，但是得到的效果一样，说明行和列有一定的关系，后面应该会解释这个现象。这个例子显示了矩阵的对称美。

6. c分别为3，-1和0

7. x垂直平面上两条不共线的向量，那么x垂直该平面。

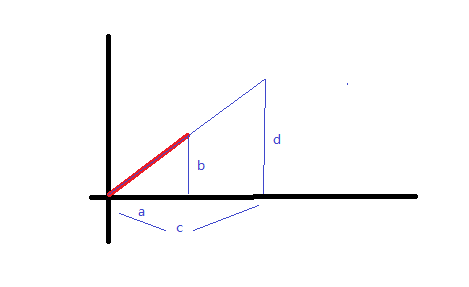
8.

9.

10.

11. 数学归纳法，直接展开，操作变化即可

12.

14. 可以由相似三角形受到启发，这也是为什么行成比例导致列成比例的直观解释

Problem Set 2.1

1. 行视图不变，因为是平面，列视图改变，因为变长了
2. 列视图和行视图均改变，解不变
3. (3,0,1)

8. 4维空间，4个超平面相交在一个点。(x,y,z,y)=(0,0,1,2)

14. A的行为1，列为4

15.(b)

16.(a);(b)

17.; Q =

19. (3,4,8);(3,4,5)

20.(5,0);(0,0)

21.

27. 点

29. 马尔科夫链最后会收敛

31. M3\*(1,1,1) = (15,15,15),M4\*(1,1,1,1) = (34,34,34,34)

32.行视图，存在共面，最后总是两个面相交，得到一条直线。行视图，第三个列会表抵消，得到两个向量与b的关系。

33. Aw=5Au+7Av

34. 可转成上三角矩阵，有解

35. （45,45,…,45）

Problem Set 2.2

5. c=20无穷解， c≠20,无穷解

6. b=4，g = 32

7. a=2, 永远无解，否则就有解

8. k=3, 无限解； k = -3, 无解；其他，唯一解

9. b­2-2b1=0,无数解；否则，无解

11.1)回带时，若有解，那么只有一种可能，可以通过上三角矩阵看出来。

2）两点的延长线上

12. z=0,y=1,x=4

13.z=0,y=1,x=3

14.d≠11,有解；d=11,无解

17.均最多有2个pivot，也可能无解，因为缺乏表现力

18. 当b=(0,0,0)时，无数解。

当b=(1,10,100)时，有可能无解，有可能无数解。

19． q=-4,t=5

22. 第五个pivot是5

24. a=2或0

25.上三角后，对角线为0即可

26.S = 10, 无数解

31. 1~j-1行；是；否；对角矩阵

32.a)0;b)0;c)不可能;d)行视图，交于99维度超平面，列视图，可以至少去掉一个列向量，还可以保证描述能力。

Problem Set 2.3

1. (a)

(b)

(c)

2.效果不一样，E32提前后，行3和行2无影响

3. M就是A的逆矩阵

5.第一个空填9，第二个空填2

7到5，只能加减，那么必然是减2过来的，无论这个2在第几行。那么，如果变成11，那么，减2后变成9，所以，如果7变2，就没有pivot

6.每个元素都一样。1个pivot

7. 符合交换律

8. 按照计算规则，可以轻松计算，这里剧透了行列式

9 （a）效果按顺序叠加；

（b）排序改变了形状，所以E需要变化。也解释了为什么矩阵乘法的交换律不成立。

10. b), c)

12. 左边矩阵作用行，右边矩阵作用列。

13. E作用于列，如果列全0，那么0那一列无论加减，都是0.但是如果行全0，其他不为0的行可以使得那行变化后，不为0.

15. E31破坏了

17. (a,b,c)=(2,1,1)

18.

19.

21. EF ≠FE

22. (a)

(b)

(c)

(d)

23. E(EA)=r2-4r1.AE=作用在第一列

26. 解法一样

29. M=ABAAB

Problem Set 2.4

1. ,可以用数学归纳法证明
2. 矩阵乘法无交换律
3. (a)对， AB[,1] = (); AB[,3] = ()

(b)错，,类似上面，但是错误，应该A的r1=r3

(c)对，AB的r1=r3,那么ABC同样这样，这里可以看到一点传导特性

(d) 错

1. 对角矩阵在乘法左边作用与行，在右边作用与列。
2. （a）

(b) B =

(c) B =

(d) c =

15. mn, mnp,nnn

16. 需要对矩阵乘法比较了解

22. A = , B= , C = ,

23.(a) A = ,

24.

31.=

32. X=

33. x = ,将X变成I，那么右边I就变成A

36. 巧用矩阵乘法关联性，可以减少计算量

Problem Set 2.5

5.有规律，,然后通过Ukk和Ukk-1来找规律。

6.（b） B和C的行的线性组合

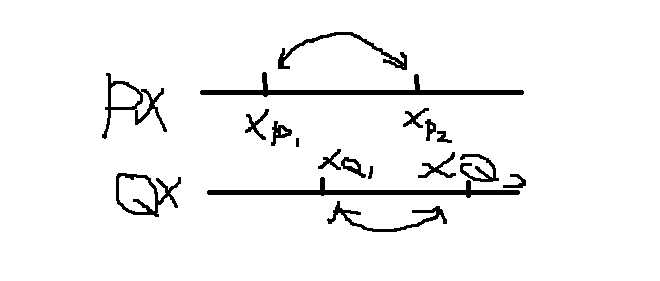
9. EA=B, A可逆，且E可逆，所以I=B(A-1E-1)

11.(a) A =

21. 2

30. 转成三交矩阵，然后令任意对角为0即可。

33. 示意图



令XP1=X­P2且XQ1=X­Q2

44. 矩阵C经过线性变花后，最后一行全0，那么Cx=0中的X解有无数个。F也类似C

46. 如果（I+AB）和（I+BA）的逆存在，且A可逆，那么A(I+BA)逆存在。

Problem Set 2.6

4. x=(5,-2,2), c=(5,2,2)

7. R代码如下

|  |
| --- |
| E21 <- diag(3);E21[2,1] <- -2  E21\_m <- diag(3);E21\_m[2,1] <- 2  E21 %\*% E21\_m  E31 <- diag(3);E31[3,1] <- -3  E31\_m <- diag(3);E31\_m[3,1] <- 3  E31 %\*% E31\_m  E32 <- diag(3);E32[3,2] <- -2  E32\_m <- diag(3);E32\_m[3,2] <- 2  E32 %\*% E32\_m  E21 %\*% A  E31 %\*% E21 %\*% A  E32 %\*% E31 %\*% E21 %\*% A  L <- E21\_m %\*% E31\_m %\*% E32\_m  U <- diag(3); U[2,2] <- 2; U[3,3] <- 2; U[1,3] <- 1  L %\*% U |

12.对称方正经过LDU分解后，L与U根据D对称。

1. a≠0,b≠a,c≠b,d≠c
2. a≠0,b≠r,c≠s,d≠t

17. EL=I, EI=E, ELU=U

20.每一列只需要消除下面一列即可

23.5,9

Problem Set 2.7

1. 手动验证逆与转置的互换
2. 通过代数，使用2维方正，可以直观推导

8 第一排有n种选择，第二排n-1种选择，以此类推

9 P3=P­4

11.

13. (a)

(b)

14. 每个元素180度对换

15(a) row 4到row 1

(b)

16. (a)对称;(b)不对称;(c)对称;(d)不对称

18 （a）15；（b）L有10个，D有5个；（c）对角线必须是0，所以只有10个

19.（b）对角线上是

23. P就是三个单步排列矩阵，L和U是I

26. 需要证明P­1P2=P3，这一点需要重微观角度观察，可以发现在上面的基础行交换矩阵中，是不可能的。

29 DP = DT=D,P=I，不是列交换

32.ATy是单价，Ax是总材料

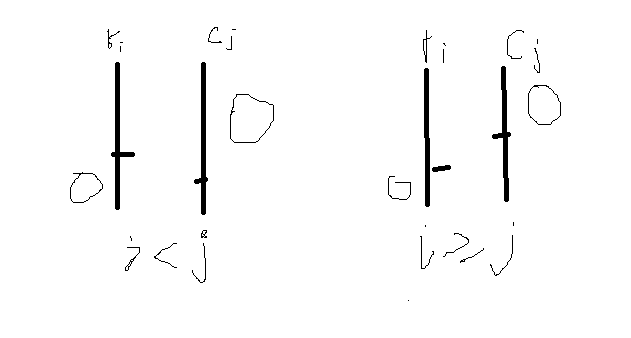
34.

35. 下三角矩阵的逆仍然是下三角，因为求逆过程是一系列下三角基础矩阵E的作用，而这些矩阵的逆显然是下三角，而这些矩阵相乘也是下三角。

36．L ok，S ok，M no, D ok, P ok, Q ok,

N是任何方正， I单位矩阵

37. BT是, B2不是，B-1是northwest，BC上三角



39

40. 标准正交基，第三个例子可以解出来，有四组

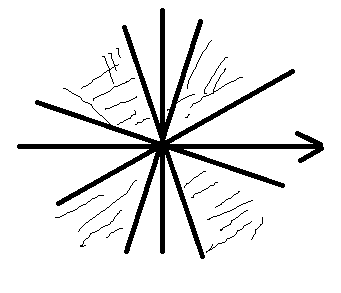
Problem Set 3.1

3(b) 1

4.

5(a)cA;(b)yes;(c) cA+dB

9(a)x>1 且 y>1

(b)阴影部分

10,(a)是，退化为二维平面

(b)不是，没有0

(c)不是，x+y不符合

(d)是

(e)是，平面

(f)(不是，cx破坏了

14(b);

16 如果L在P中，是P；否则，是R3

17.(a) 可逆矩阵不包括0；（b）两个奇异矩阵相加后，可能可逆。

20.(a),两个平面相交，也就是直线

(b),平面

26. R5，Mx=y，M可逆,则x=M-1y，y属于R5,推导出x属于R5

27(d)false, A=I

29. R9

30．S+T是平面，ST是两条直线

31. M=

32. 2 by 2 ，列个公式计算，A2的列线性相关

Problem set 3.2

3. 自由变量

6. n

9. m 和n分两种情况考虑

10（a）不可能，上三角元素无法被消除

（b）可逆即可

（c）不可能

（d）对角矩阵，对角为0.5

13 （0,0,0,1,0）

14 最后一列，应为c(3,5)=0

18. 需要借助过原点的平面，然后平移

21.可以计算最简化梯形矩阵

24. 限制过多，存在矛盾

25. 无法构建

28. AB=0,C(B)=N(A)，有意思，建立了联系

31. 两种情况，需要分开考虑

35. rref(B)=A-1[A A]=[I I]=04, 有点pseudo-inverse的感觉

36. N(C)是N(A)的线性子空间

Problem Set 3.3

7.如果rref(A)不是标准的，可以通过排列矩阵将其变成标准的，然后在结果除，再排列回来即可。

11． 0

17.（a）=>

(b)A1全1，A2全0

20. rank(AB)=rank(BTAT)<=rank(AT)=rank(A)<=2

25. 这个结论太有用了！！！

A = (pivo columns of A)(first r rows of R) = (COL)(ROW)

26.

27 实用block matrix计算，比较简单

28.

Problem Set 3.4

1. b构成一条穿过原点的直线

5. -2b1-b2+b3=0,b在一个平面上，由于b是C(A)的线性组合，所以b的平面就是C(A)

10.

11 假设可以，可以计算出正确的xn不止是（1,1,1）

19 rank(A)=rank(AT)

20. rank(ATA)=rank(ATA)<= rank(A)= rank(AT)

22.

24

1. 1解， 0 解
2. 无限解
3. 无解，无限解同(b)
4. , 唯一解

25.

（a）r<=n<m，形如：

（b）r<m<n，形如：

（c）r=n<m, 形如：

（d）r=m=n, 形如：

36. (A-C)x=0,那么x属于N(A-C)，或A=C。两种可能。

Problem Set 3.5

7. 此题是worked examples 3.5c的应用，A是否可逆确定v是否现行独立，通过rref(A)观察。

8. A可逆，通过定义代换，然后两边乘以A-1即可得到结果。

10. null空间维度为3，所以不可能有4个基

13 没有相等的

16（b）N(AT)=c(1,1,1,1)，维度为3

23. 消元后，null space的基保持不变，column space会变化

30. 根据（2,1,1），设计一个A，然后根据null space的块计算，可以得到null space.

36. 最多维度为2，最终维度的最大值为较小的那个，dim(S∩T)≤min(dim(S),dim(T))

37. S最大为2维，

基

41． 3x3排列矩阵只有6种，按照线性独立定义，可以轻易解决基的问题。

42. (a)x1=x2=x3=x4=0

(b) x1=x2=x3=x4=1

(c) x1=x2=0,x3=x4=1

(d) x1=x2= x3=0, x4=1

45. 直接利用44的结论即可

46. null space

Problem Set 3.6

1 Left Null Space和Column Space是两个好基友；同理，Row Space和Null Space。因为他们彼此之间维度相通，维数之和固定。

1. （a）

(b)

(c) n = 1 + m

(d)

(e) N(A)=N(R)=N(AT)

5 null space先找基

10 按rank，计算概率

11 （1） r<=n<m;(2)r<m, r<=n,m与n无特定关系，结合1，那么就显而易见了。

12 A=,满足null space后，转置过来，消元后，就无法满足left null space

13(c)是的，无法通过线性组合行（行空间和零空间不变），而不改变列的线性空间；反之也不行。

20(b) E-1A=R，说明E-1最后一行 乘以A为0，满足左零空间定义，说明是Left null space

21（a）u+w

(b)v+z

(c)u=kw或v=kz

24 row space; left null space

25.(c)任意不对称可逆方阵

(d)R(AT)=R(-A)=R(A)

30 kB=A

32.根据相同的row space， ，那么Y=I,那么G=F

Exam 1

1

(a) R =, d= (4,0,0)

(b)

=

2

1. span()

3

1. always, many solutions
2. R3;零空间维度为2，属于R5

4（a）b属于C(a);(2)有解

Problem Set 4.1

3 (c)fase, (1,1,1)在C(A),(1,0,0)在左零空间,不可能，因为不正交

(d)

(e)false, [1,1,…,1]不与自己正交

9 ATA与A有相同的0空间

1. rref的列相同，与列相关的子空间的基相同
2. 计算N([A -B])，取任意向量即可
3. yTAx=(ATy)Tx=0Tx=0

23.v属于V垂直，v=s1+s2,s1可以被V表示，那么系数为0，那么v=s2。

25 ATA=I

28(c)比较斜的直线和平面

31 row space

Problem Set 4.2

5 因为a1,a2垂直，所以投影到上面的向量互相垂直，假设向量x，那么(P1x)TP2x=xT0x

10 不是投影

18（a）直线；（b）面

23 当A可逆时，A可以描述整个空间，投影无意义。error为Z

27 Ax属于N(AT)且Ax属于C(A),所以Ax=Z

28 P=P2=PTP

30 (a)A的列线性相关，ATA不可逆，但是投影到A，其实就是投影到其整个空间，等价投影到基，所以可以先化简为等价的基，然后在计算投影，效果等价。投影与特定向量无关，与投影空间有关，所以基可以随便换

（b）B=A, PC­A=A, PR对称，那么APr可以通过PrAT解释，显然(自己投影到自己)PrAT=AT，所以APr=A,所以B=PcAPr= (PcA)Pr=APr=A

31. b-p ⊥c(A)

32最后仍然投影到P2上，但是打了一个则

33 P1=P2或P1⊥P2

Problem Set 4.3

1. 均值作为截距

6. 如果固定从原点开始，减少了描述空间

7．因为A可逆，所以p=b,e=0

11. (b)将方程展开，可以得到中心点与C，D的关系

Problem Set 4.4

8 q1Tb, q2Tb，对于norm向量，点积可以计算投影长度

10 (b) Qx=0 => QTQx=QT0=0, => x=0

18 使用改进的Gram-Schmidt方法可以极大提高计算效率。

30 W-1=WT,W是Q，标准正交基

33 所有对角矩阵

36 C(Q1)=C(A),C(Q2)=N(AT)

Problem Set 5.1

1 det(2A)=24det(A), det(-A)=det(A), det(A2)=det(A)2,

det(A-1)=det(A)-1

5

11 (-1)n

12 与11类似

21 证明了rule2

25 rank(A)=1

26 n行减去n-1行，与row2-row1相同

29 A可以不是方阵

30 |B|=-6

Problem Set 5.2

2 |A|=-2,|C|=4,|B|=0,|D|=0

1. 感觉剧透了下一节的内容
2. 0,12
3. (a)4,(b)7

12 Cn=-Cn-2, C­10=-C8=C6=-C4=-1

15 E100=-1

20 Gn=-2Gn-1-Gn-2

21 S4=55

26, 点积，或0

34, 大公式的每个子项中都有0

Problem Set 5.3

1 (a) x=(-2,1);(c)x=(3/4. -1/2,1/4)

3 (a)等式不成立;(b)等式成立，但是无法解x

1. x=(1,0,0)
2. CT=0那么如果|A|!=0，A-1=0,这种情况不可能，所以|A|=0成立，所以A不可逆。若所有代数余子式都不为0，A可能不可逆。比如
3. 因为4不参与最后计算

14 （c）CT=QT或-QT

16

Problem Set 6.1

1 (b)0特征值，表示A是奇异的，也就不可逆，消元后仍然不可逆，所以0特征值仍然存在。

1. 特征值无相加性，因为特征向量不同。

10 (0.4)100≈0

11 x2在列空间，x1在0空间。λ1≠λ2表示x1与x2不共线，那么可以span R2

16 通过分解多项式因式分解，可以证明

18

19 （a）|B|=0 => rank(B)<3 => 1不可能，那么只有2

（B）0

（c）|BT(B-λI)|=|BT|| B-λI |=0\*| B-λI |=0,无法计算λ (d)平方，I相加和倒数，(λ2+1)-1

20 变成解线性方程组

21 A,AT的特征值相同，但是特征向量不同

22 有种感觉，特征值个数=rank，后续有待证明。这样，λ=0,1，-0.5

23 通过代数运算，A2=0必然存在

24 对于3\*3，rank=1的矩阵，特征值计算公式，矩阵形如下

解下面方程

25 感觉是SVD的框架

根据特征值定义的：

提取公共部分

令X=,Λ=,得到AX=XΛ,

**由于X可逆，所以A=XΛX-1,同理可以得B= XΛX-1,,所以A=B**

若特征值λ1≠λ2+，那么对应的特征向量必然线性无关，可以通过反正法推导。

26 通过行列式分块计算方法，可参考[wiki](https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant#Block_matrices)

27 还是参考上面的行列式块计算分解

30 λ=a+b 或 b-d, 使用trace

31 好像就是排列组合了一下，PTXB=XA

32(a)N(A)=span(u),C(A)=span(w,v)

(b)u=(1,0,0),v=(0,1,0),w=(0,0,1)

(c)null space在column space

33 都是0

34 λ=1，x=(1,1,1,1)一定存在。其他是哪个需要虚数计算。

37使用25题结论即可A∞= XΛ∞X-1

Problem Set 6.2

3 特征向量x不变，新的特征向量矩阵为Λ=Λ+2I

4 (a)特征值可能为0，导致A不可导

1. 对；（c）对；（d）可逆不一定可对角化，因为特征值的维度不够。特征值重复，不可对角化，但是可以逆，比如单位矩阵。
2. 单位矩阵的特征矩阵可以构成单位向量，上三角矩阵相乘仍然可以得到上三角矩阵。

7

9λ=1或-1/2

1. 数学归纳法
2. 特征值不同，特征向量必线性独立，可逆且可对角化
3. 重复特征值，特征向量线性相关，不可逆，不可对角化

15 A2n=0,

16 只看到了特征值为1的特征向量

17 验证了power计算

18 对称矩阵，对角后还是对称的

19 上三角，power后还是上三角

21 trace=特征值值之和

23 S可逆，说明特征只足够，可以对角化，那么块状也可以，特征值此时的作用不大。

25 AT(AT-I)=0可以拿到A的左0空间，此时特征值为0；A2=A可以拿到A的列空间，此时特征值为1；由于列空间+左零空间可以span整个空间，那么可逆。

26 列空间的基友是左零空间，行空间的基友是0空间，不要由于行列相同，就偷换概念

28 简单替换即可

32 =0,中间那部分连乘是为0的。

用λ代替A，得总成立。

37 等式右边往左证明比较容易

38 C=-1/(n+1)

Problem Set 8.3

1 x=(0.6,0.4)

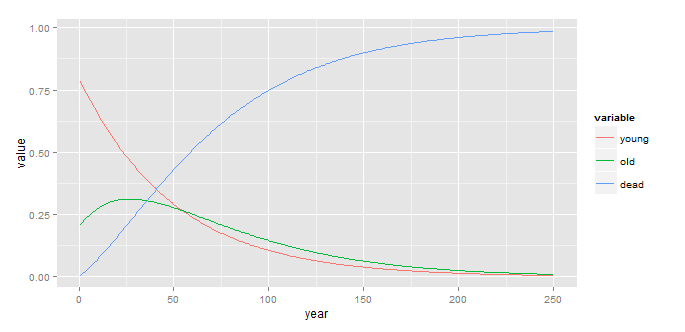
2

3 无论怎么样，稳态的向量与u0无关，但是需要明确的证明。c­1x­1是一个probability vector即是稳态。

对于存在0,0,1markov矩阵，终态必须为（0,0,1），必须将终态放在最后一列,位置不重要

4 AT=(SΛS-1)T=(ST)-1ΛTST=(S-1)TΛST

5 全部死光，稳态(0,0,1),绘制的曲线，如下



1. [1…1]x=[1…1]Ax=[1…1]λx=λ[1…1] x,其中λ≠1，所以 [1…1] x=0
2. 设,如果稳态是(0.6,0.4),那么λ=1的特征向量比满足 ，并且符合markov矩阵，得到如下线性方程组

解上面线性方程组即可

8 λ=1,-1,i,-i,不收敛

1. [1 … 1]A2=[1 … 1]AA=[1 … 1]A=[1 … 1]

10 a+d-1, x=(b, 1-a)

11 A=AT,推出 ([1…1]A)T=[1…1]T

AT[1…1]T=A[1…1]T=[1…1]T,推出(A-I) [1…1]T=0,

Exam 2

1(a)

(b)C(P)=(2,1,3),,

由于C(P)=C(PT),所以N(P)⊥C(P)

1. 特征向量分别是C(P)和N(P)的基

2(a) ,C(AT),如果A的列线性依赖，ATA不可逆。

(b)

(C)

3(a)

(b) (n-2)/(n-1)

λ=1,x=(-1,1,0)或(-1,0,1)；λ=-2,x=(1,1,1)

Problem Set 6.4

3 λ=0,4和-2,

4

1. ，对称矩阵，阀值与特征值符号相同。只有b>1或b<-1时，必有负阀值。

8 A=QΛQT,A3=QΛ3QT=0,推出Λ3=0，推出Λ=0，推出A=Q0QT=0

1. 3维，2个共轭，相加消去负数，必有一个实数，否则trace是负数

10 x可能是否复向量，并且xTx可以为0

14 i或-i

16 λ=1或-1，每个特征值有两个特征向量

17 分开计算

18 矩阵（A-βI）与A的特征向量是相同的。

20 实对称矩阵是Hermitian matrix的特殊例子

21(a)反例

(b)不对，正交不能确保对称

(c)不对，如果特征值存在0，则不可逆

(d)Q-1=QT,不要偷换概念

22 特征值不同，λ1ATx=λ2Ax

23 A 可逆，正交，排列矩阵，不是投影矩阵，可对角化（实对称），马尔科夫矩阵；可以LU，可以QR，可以SΛS-1,可以QΛQT

B 不可逆，不正交，不是排列矩阵，投影矩阵，可对角化，马尔科夫矩阵; 不可以LU（不可逆），不可以QR（不可逆），可以SΛS-1,可以QΛQT

24 b=1可对角化，b=-1不可以分解，b=0,不可逆

28 与22类似，引入Hermitian Matrix

29

Problem Set 6.5

14 A-1x=x/λ,号不变，若A正定，A-1正定

16 使用A=LDLT展开，得到

所以令第一项和第三项都为0，且中间项不为0，可以很容易得到一组x.

17 需要用到16的结论

22 R=QΛ1/2=

26 直接化简矩阵即可得到L和D

27 阀值，消元项与正定性有强相关性

28 形式是A=QΛQT

29 感觉有问题

31 c=9,半正定，c<9马鞍形，c>9,正定

32（a）A-1正定，AB不一定正定，参见[反例](http://math.stackexchange.com/a/79193/261790)

（b）QT正交，Q1Q2正交

（d）stay,参考[证明](http://math.stackexchange.com/a/66548/261790),或下面的33题

（e）stay

33 ABx=λx

=> (Bx)TA(Bx)=(Bx)Tλx > 0 利用A正定

=>λ(xTBTx)>0 =>λ 利用B的正定

35 y=Ax,由于A列线性独立，x≠0，所以y≠0;由于C正定，所以yTCy=xTATCAx>0,即xTATCAx正定

这一节中的5个推理是可以连接成为一个整体的，

Problem Set 6.6

1 矩阵相似具有连锁性

2 使用置换矩阵,P=P-1,推出A=PBP

3(a)使用特征值计算，M=S-1,S是特征值向量

(b)特征矩阵作为相似的桥，

(c)直接计算会比较麻烦，

4 A=SΛS-1,令S=M，M-1AM=Λ,所以A相似Λ

5 计算每一组的特征值，一样就相似

7 Ax=0,推出(M-1AM)M-1x=0

1. S,Λ相等，所以A=B；均为1维2x2矩阵
2. ,k=0,A0=I
3. ,k=0,J0=I

12

Problem Set 6.7

1.

2 [1 2]T for R(A), [2 -1]T for N(A), [1 3]T for C(A), [3 -1]T for N(AT)

7 只用第一个主成份即可

8 a>=b, a/b >=1

9 A= UVT



Problem Set 7.1

3 (a)

(b)

(c)

(d)不是

(e)

(f)不是

4 嵌套仍然线性

6（a）都不满足；(b)都满足；（c）都满足；（d）都满足

1. 转成矩阵标准，然后平方
2. 找到对应矩阵，计算矩阵的列空间或零空间
3. 有周期，T4=T
4. T矩阵均不可逆

12 根据V空间的基，计算系数，然后通过T，得到W中对应向量。

16 反例,A不存在

17 全错

19 A-1MB-1

20 (a)横纵伸缩;（b）直线；（C）角度，倾斜

21

|  |
| --- |
| H <- matrix(c(-6,-7,  -6,2,  -7,1,  0,8,  7,1,  6,2,  6,-7,  -3,-7,  -3,-2,  0,-2,  0,-7,  -6,-7), nrow=2)  A <- matrix(c(1,0,  1.5,1), nrow = 2, byrow=T)  plot(t(A%\*%H), type= 'l')  lines(t(H), type= 'l', col='red')  lines(t(A%\*%H), type= 'l')  D <- matrix(c(2,0,  0,1), nrow = 2, byrow=T)  A <- matrix(c(.7,.7,  .3,.3), nrow = 2, byrow=T)  U <- matrix(c(1,1,  0,1), nrow = 2, byrow=T)  plot(t(D%\*%H),type='l', col='green')  lines(t(A%\*%H),type='l', col='blue')  lines(t(U%\*%H),type='l', col='pink')  lines(t(H),type='l', col='red') |

Problem Set 7.2

1

2 [1 0 0 0]T,[0 1 0 0]T

4 果然线代与微积分有通路

14 (c)不可逆

1. 14的通用解，ad-bc≠0
2. (a)MN;(b)直接求逆

18 Q正交

19 M-1

20

# w3

a <- matrix(c(1,1,1,

1,-1,1,

1,0,0),nrow=3)

matrix(c(0,0,1), nrow=1) %\*% solve(a)

# w2

a <- matrix(c(1,1,1,

-1,0,1,

1,0,1),nrow=3,byrow=T)

matrix(c(1,0,0), nrow=1) %\*% solve(a)

23 可逆

29 ST=-I

Exam 3

1(a) 正交

（b）-1

(c)1；n-1；因为有足够的特征向量

(d)Hii=1-2ui2;trace = all eigenvalues sum=n-2

2(a)A-1的特征值是A的倒数，A正定，所以A-1特征值全为正，所以A-1正定

(b)A=RTR, 使用能量定义，xTQAQTx= xTQ RTR QTx=(R QTx)2>0

(c)rank(B)=n,B维度2n\*2n，所以必然不是正定，阀值有n个为0，使用能量法，矩阵块块乘法，可以转成A的能量形式。但是x=x1+x2,当x1=-x2时，半正定。

3（a）u1+u2

（c）

Problem Set 7.3

1 ;

2(a) v1∈C(AT);v2∈N(A);u1∈C(A);u2∈N(AT)

(b)ku1v1,k≠0

3

5-6.

7 使用SVD简化形式，然后使用矩阵块乘法即可

9 满秩ΣΣ+=I

12 A+是3乘2维度

1. 如果det A = 0,说明r<m,且r<n,所以r(A+)<m或n，所以det A+=0
2. A必须对称且正定

A+是A的逆操作，A是一个线性转换，将行向量转列向量，而A+是将列传行，只有在A可逆时，A A+ =I，否则AA+是一个投影，将b向量投影到最近的A的列空间中。伪逆其实就是左逆和右逆的特殊形式。可以通过SVD来推导。

[伪逆推导](https://ccjou.wordpress.com/2009/06/10/%E9%80%9A%E9%81%8E%E6%8E%A8%E5%B0%8E%E5%81%BD%E9%80%86%E7%9F%A9%E9%99%A3%E8%AA%8D%E8%AD%98%E7%B7%9A%E6%80%A7%E4%BB%A3%E6%95%B8%E7%9A%84%E6%B7%B1%E5%B1%A4%E7%B5%90%E6%A7%8B/)

15(a) 不可逆

（c）x+是R(A)唯一确定的，如果在加上N(A)中的一个分量，虽然等式任然成立，但是摸边长，且不唯一。

17 AA+p=Ax+=p;A+Axr=xr; AA+e=0; A+Axn=0

20 对称

22 [C C­­n-r]=UR­c;[B Bm-r]=VRB;代入SVD

A=[C C­­n-r] R­c-1ΣR­B-1[BT BTm-r]=C( R­c-1ΣrR­B-1)BT

23

Problem Set 10.1

1 (a)5;(b)-2i;(c)1

2 (a)(2,1);(b)(3,4);(c)(0.4,-0.2);(d)

3(a)10;(b)2θ;(c)- θ;(d)-2θ

4 |Z\*W|=6,|Z+W|<=5;|z/w|=|z|/|w|;|Z+W|<=|z|+|w|

6 1/r, -θ,

1. (a)c<0;(b)a+d和0;(c)通常是两个不相等的实数，无法互相共轭

14

15 解；推广到复数平面上，就是单位元六等分的点

16 反对称矩阵的特征值全为纯虚数

1. （a）

(b)

(c)

(d)

18 z = cos(π/2 - θ)+i\*sin(π/2 - θ),乘法就是指数相加

20 与15类似

21 ;

22 单位圆上

23(a) ;(c)不等

24(a)单位圆一周;(b)内螺旋;(c)单位元3.14周

Problem Set 10.2

1

2 Hermitian

3 转置变成Hermitian

5 (a)

(b)Az=0 <=> AHAz=0

6(a) true, iI线性独立，A无法消除iI

(b)false，-i不一定这是特征值

(c) true，-i是U的特征值

8 P可逆且是酉矩阵，P2=iP,P3=-iP,P4=P;周期；P100=P4=P;

λ1=exp(iπ/2)=i,exp(i7π/6),exp(i11π/6);极坐标转换，画圈，2π以内。

9λ1=i,x1=[1 1 1]T/;

11根据酉矩阵的定义证明

12 行列式等于特征值连积，埃尔米特矩阵特征值全部为实数。所以连接为实数。回到实对称矩阵的证明，换成埃尔米特矩阵。

14 u­1Hu2

15 反号埃尔米特矩阵可以得到，也就是特征值全是虚数；艾米特矩阵得到，也就是特征值全是实数。

18

19 需要定积分，z点乘需要zHz,[指数定积分参考](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8C%87%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%A7%AF%E5%88%86%E8%A1%A8)

21 实数部分对称，虚数部分反对称

24 平方的关系

25 直接使用定义，uuH是投影矩阵，任意复数向量b,有p=（uHb）u=uuHb

26 直接用虚数为0，实数为I，代入Q即可。

27 直接利用性质

Problem Set 6.3

1

3 u(∞)=[3 2]T

4 最终达到稳态

6 a <-1, b < 0

7 P=aaT/aTa

8 2:1

9 u(t)是一个周期函数

10 直接代入与矩阵解法一样

1. 最后得到指数函数带i或三角函数带i

主要是为甚eΛt与e-Λt的乘积是I

对角矩阵相乘，得到I

22 可以帮助21计算S

25

26 eλtx

27 交换行是不改变结果的，注意对齐每个元素。

31 (a) cos(A)x=cos(λ)x

(b) C=I